Leopold Fejér

9. 2. 1880 – 16. 10. 1959

Leopold Fejér war seit 1954 korrespondierendes Mitglied unserer mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse. Er kam 1880 in der ungarischen Stadt Pecs (Fünfkirchen) zur Welt, erwarb 1902 den Doktorgrad in Budapest, habilitierte sich 1905 in Klausenburg und wurde bereits 1911 ordentlicher Professor in Budapest. Mit ihm ist ein ungewöhnlich ideenreicher und fruchtbarer Analytiker von uns gegangen, dessen Meisterschaft sich auf vielen Spezialgebieten bewährt hat. Vornehmlich beschäftigte er sich mit der Theorie der Fourierschen und der Laplaceschen Reihe, mit dem Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises, mit Interpolationspolynomen, mit der Lage der Nullstellen von Polynomen, schließlich mit einem von ihm inaugurierten vielgestaltigen Problemkreis, der unter dem Stichwort Minimax- oder auch Maximinprobleme bekannt geworden ist.

Von speziellen Leistungen kann hier nur einiges wenige hervorgehoben werden. Schon im Alter von 20 Jahren, zwei Jahre vor seiner Promotion, gelang ihm ein Meisterstück, indem er die bedeutungsvolle Entdeckung machte, daß die Cesàroschen Mittelwerte der Fourierreihe einer stetigen Funktion konvergieren, womit zugleich für den Weierstraßschen Satz der Approximierbarkeit durch Polynome ein überraschend einfacher neuer Beweis gewonnen war. Die Cesàrosche Summationsmethode divergenter Reihen war damals noch so gut wie unbekannt; man hielt sie höchstens, soweit man überhaupt Kenntnis von ihr hatte, für eine Kuriosität. Aber Fejér erkannte ihre Bedeutung. Es ist heute nicht schwer und war auch damals nicht schwer, den Fejérschen Satz zu beweisen. Jedem Drittsemestler kann man das als Übungsaufgabe vorlegen; er braucht nur die Ausrechnung einer gewissen Summe und ein bißchen leichte Epsilontik. Aber *vor* dem Beweis des Satzes mußte man die *Idee* haben, daß es so einen Satz gibt und daß er große Bedeutung hat, und diese Idee hatte eben Fejér. Später hat er auch die Laplacesche Reihe untersucht, und da fand er, daß zwar nicht die Cesàroschen Mittel erster Ordnung, wohl aber die Cesàroschen Mittel zweiter Ordnung konvergieren, und dasselbe bewies er auch für die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung; daß das eine aus dem andern folgt, war damals noch nicht allgemein bekannt.

Darboux hat gezeigt, wie das asymptotische Verhalten der Koeffizienten einer Taylorschen Reihe von den Singularitäten der durch sie dargestellten Funktion auf dem Rand des Konvergenzkreises abhängt; er hat aber nur Singularitäten von dem einfachen Typ berücksichtigt, wie sie bei den Funktionen der Fuchsschen Klasse auftreten. Demgegenüber ist es Fejér mit einer weiterreichenden Methode gelungen, auch eine *wesentliche* Singularität in Betracht zu ziehen und speziell bei der Funktion $(1-z)^{\rho} \exp((z-1)^{-1}) = \Sigma c_n z^n$ ein höchst merkwürdig schwankendes, aber genau angebbares asymptotisches Verhalten der c_n für $n \to \infty$ nachzuweisen.

Eine weitere bedeutungsvolle Leistung Fejérs war die Konstruktion von stetigen Funktionen, deren Fourierreihe nicht überall konvergiert. Daß es solche Funktionen gibt (ohne deren Existenz und mit nachgewiesener Nichtexistenz wäre die oben beschriebene Leistung des 20jährigen Fejér gegenstandslos gewesen), war zwar schon 1876 durch Paul du Bois-Reymond dargetan worden; aber seine Konstruktion war sehr kompliziert, so daß die meisten Mathematiker die Sache wohl einfach geglaubt haben, ohne sich durch die knifflichen Gedankengänge am Ende einer 100 Seiten langen Arbeit durchzuquälen. Auch die später von anderen Autoren beigebrachten Beispiele waren zwar einfacher, aber immer noch recht kompliziert. Demgegenüber gibt Fejér gleich zwei verschiedene überaus durchsichtige Methoden zur Gewinnung solcher Funktionen.

Daß die Fourierreihe einer unstetigen Funktion $f(x)$, die den Dirichletschen Bedingungen genügt, an einer Sprungstelle x_0 konvergiert und den arithmetischen Mittelwert zwischen $f(x_0-0)$ und $f(x_0+0)$ darstellt, ist ein klassisches Resultat von Dirichlet. Aber ob und wie man auch die Einzelwerte $f(x_0-0)$ und $f(x_0+0)$ selbst und damit die Größe des Sprunges aus der Fourierreihe gewinnen kann, war ein Problem geblieben. Fejér hat es gelöst; seine sehr einfache Antwort lautet: Man bilde die Partialsummen $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \ldots$ der Fourierreihe nicht für die feste Stelle x_0, sondern für eine gegen x_0 konvergierende Folge: $s_n(x_0+g/n)$, wo g eine geeignete genau angegebene positive Zahl bezeichnet; dann ist $\lim s_n(x_0+g/n) = f(x_0+0)$ und weiter ist auch $\lim s_n(x_0-g/n) = f(x_0-0)$.

Durch die gleichzeitige Untersuchung von zwei konjugierten Fourierreihen wurde Fejér auch zur Erkenntnis der Existenz und zur wirklichen Konstruktion von analytischen Funktionen geführt, die im abgeschlossenen Einheitskreis stetig sind und auf dem Rand trotzdem Divergenzstellen aufweisen. Demgegenüber bedeutete es eine weitere Überraschung, als er fand, daß Divergenz nicht mehr vorkommen kann, wenn die Abbildung schlicht ist. Was die Nullstellen eines Polynoms anbelangt, so war das verblüffendste Ergebnis seines Forschens eine Schranke für den Betrag der absolut kleinsten Wurzel, die nur von den zwei niedersten Koeffizienten und der Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten abhängt (aber nicht einmal vom Grad).

Diese Beispiele mögen genügen, um das Lebenswerk Fejérs zu illustrieren. Hervorgehoben muß aber noch werden, daß er seine höchsten Ziele stets mit den denkbar einfachsten Mitteln zu erreichen verstand, so daß seine Arbeiten für den Leser leicht verständlich und ein wahrer ästhetischer Genuß sind. Meist geht er von ganz simpeln, fast trivial anmutenden Sätzen aus und zieht aus ihnen in einem wunderbar klaren und eleganten Gedankengang die überraschendsten Folgerungen.

Fejér war ein liebenswerter, einfacher und äußerst bescheidener Mensch, dem seine Erfolge nie zu Kopf stiegen. Im Gegenteil hat er gern die Leistungen anderer gerühmt und hat oft betont, daß er selbst eigentlich alles der Vorarbeit anderer zu verdanken habe. Er verstand aber auch über nicht mathematische Dinge geistreich zu reden, und manches witzige Bonmot kam aus seinem Munde. Als im Jahr 1928 der internationale Mathematikerkongreß in Bologna stattfand und auf dem Unterhaltungsprogramm auch ein Besuch von Ravenna stand, da wurde auf der Fahrt dahin wohl viel über die Riemannsche Vermutung diskutiert, und als man dann in Ravenna zur Begrüßung gleich mit einem köstlichen Vermouth di Torino regaliert wurde, da meinte Fejér, daß im Gegensatz zur Riemannschen die Ravennasche Vermoutung eine nicht bezweifelbare erfreuliche Realität sei.

Oskar Perron